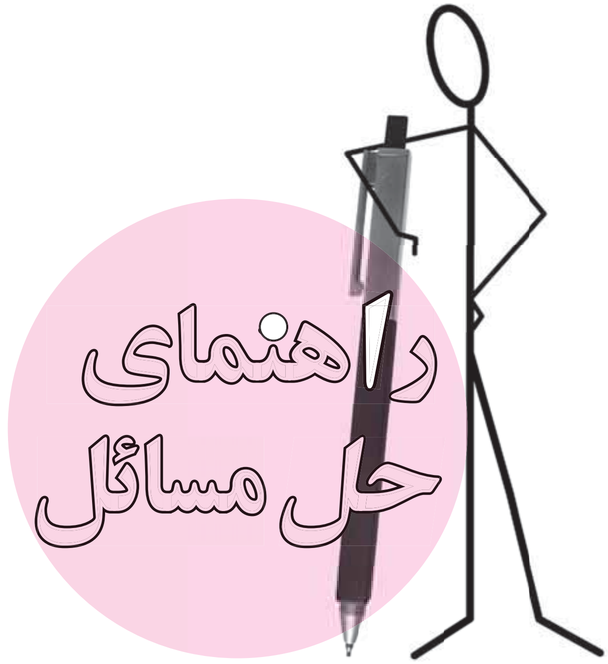


ریاضی ۱

۱. به‌طور کلی می‌توان با اصل ضرب تعداد راه‌های توزیع ۵۰ کارت بین دو نفر را به‌دست آورد. کارت اول را به دو طریق، کارت دوم را نیز به دو طریق، ... و کارت پنجاهم را هم به دو طریق می‌توان توزیع کرد (به اولی یا به دومی داد). پس طبق اصل ضرب تعداد راه‌ها برابر است با:

$$۲\times۲\times\ldots\times۲=۲^{۵۰}$$

اما برای آنکه به هر نفر حداقل دو کارت برسد، حالت‌های نامطلوب را از کل حالت‌ها کم می‌کنیم. حالت‌های نامطلوب عبارت‌اند از:

الف) همهٔ کارت‌ها به یک نفر برسد (دو حالت).

ب) ۴۹ کارت به یک نفر و یک کارت به دیگری برسد (۱۰۰ حالت).

پس تعداد کل حالت‌ها برابر است با: $۲^{۵۰}-۱۰۲$

۲. تمام حالت‌هایی که سه کتاب ریاضی پیش هم باشند را منهای حالت‌هایی می‌کنیم که کتاب‌های ریاضی پیش هم بوده و کتاب‌های شیمی هم پیش هم باشند. در حالت اول کتاب‌های ریاضی را یک کتاب فرض می‌کنیم و بعد جایگشت‌های آن‌ها را هم حساب می‌کنیم و در حالت دوم کتاب‌های ریاضی را یک کتاب و کتاب‌های شیمی را هم یک کتاب در نظر می‌گیریم.

$$۶!۳!-۵!۳!۲!=۵!۳!(۶-۲)=۲۸۸۰$$

۳. این شخص می‌تواند راه‌های زیر را در پیش بگیرد:

الف) هیچ‌یک از کتاب‌های چند جلدی را نخرد که در این صورت تعداد راه‌های او برابر است با: $\binom{۷}{۵}$

ب) فقط کتاب دو جلدی و سه جلد کتاب دیگر بخرد: $\binom{۷}{۳}\binom{۲}{۲}$

ج) فقط کتاب سه جلدی و دو جلد کتاب دیگر بخرد: $\binom{۷}{۲}\binom{۳}{۳}$

د) کتاب‌های دو جلدی و سه جلدی را بخرد: $\binom{۲}{۲}\binom{۳}{۳}$

پس تعداد کل روش‌های او برابر است با:

$$\binom{۷}{۵}+\binom{۷}{۳}+\binom{۷}{۲}+۱=۷۸$$

۴. فرض می‌کنیم ۲n شیء متمایز داریم و می‌خواهیم n تا از آن‌ها را انتخاب کنیم. در این صورت تعداد انتخاب‌های ما برابر است با: $\binom{۲n}{n}$. اما از طرف دیگر، می‌توانیم n شیء را به دو دستهٔ n تایی تفکیک کنیم. حال برای انتخاب این n شیء می‌توانیم یک شیء را از دستهٔ اول، n-۱ تا را از دستهٔ دوم، ۰ شیء را از دستهٔ اول و n تا را از دستهٔ دوم، دو شیء را از دستهٔ اول و n-۲ تا را از دستهٔ دوم و... و n شیء را از دستهٔ اول و ۰ شیء را از دستهٔ دوم انتخاب کنیم. پس طبق اصل ضرب و اصل جمع تعداد انتخاب‌های ما برابر است با:

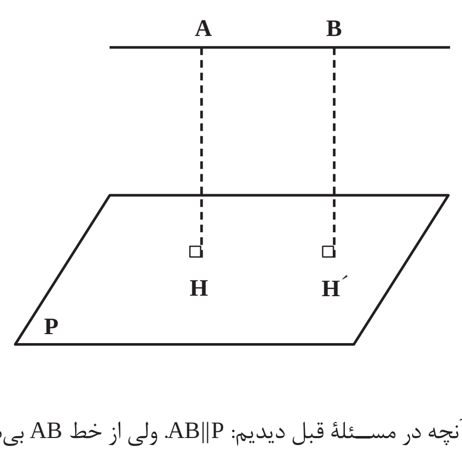
$$\binom{n}{۰}\binom{n}{n}+\binom{n}{۱}\binom{n}{n-۱}+\binom{n}{۲}\binom{n}{n-۲}+\ldots+\binom{n}{n}\binom{n}{۰}$$

ولی می‌دانیم که: $\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$ پس $\binom{n}{۰}=\binom{n}{n}$ و $\binom{n}{۱}=\binom{n}{n-۱}$ و $\binom{n}{۲}=\binom{n}{n-۲}$ و... بنابراین:

$$\binom{۲n}{n}=\binom{n}{۰}^۲+\binom{n}{۱}^۲+\binom{n}{۲}^۲+\ldots+\binom{n}{n}^۲$$

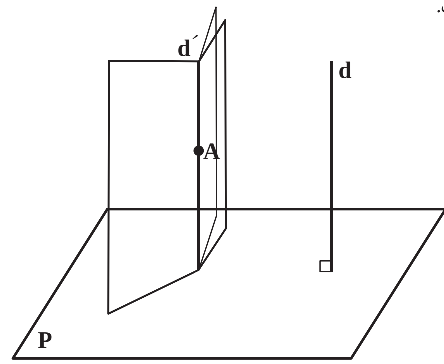
هندسه ۱

۱. A، B، H و ´H در صفحه‌اند. در آن صفحه ABH´H یک مستطیل است و در نتیجه: AB||HH´. پس: AB||P.



۲. طبق آنچه در مسئلهٔ قبل دیدیم: AB||P. ولی از خط AB بی‌شمار صفحهٔ متمایز ´p می‌توانند بگذرند. پس ´p می‌تواند با p موازی یا متقاطع باشد.

۳. گزینهٔ ۲، زیرا از خطی که بر صفحهٔ p عمود است، بی‌شمار صفحه می‌گذرد که همگی بر p عمود باشند. پس اگر d بر p عمود باشد، خط d´ که از A بگذرد و با d موازی باشد هم بر p عمود است و بی‌شمار صفحه از d´ می‌گذرد که از A هم می‌گذرد و با d موازی و بر p عمود است.



هندسهٔ ۲ (سوم ریاضی)

۱. سهمی که رأس آن مبدأ مختصات است، دارای معادلهٔ کلی $y=ax^2$ است. پس برای آنکه رأس آن نقطهٔ (۱,۱) باشد، کافی است با انتقال $T(x,y)=(x+1,y+1)$ آن را انتقال دهیم:

$$T(x,y)=(x+1,y+1)=(X,Y)\Rightarrow \begin{cases}x=X-1\\ y=Y-1\end{cases}$$

$$\Rightarrow Y-1=a(X-1)^2\Rightarrow Y=a(X-1)^2+1$$

بنابراین معادلهٔ S به این صورت است: $y=a(x-1)^2+1$ و ضابطهٔ تجانس به این صورت: $T(x,y)=(2x,2y)$. بنابراین:

$$(2x,2y)=(X,Y)\Rightarrow x=\frac{X}{2}, y=\frac{Y}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{Y}{2}=a(\frac{X}{2}-1)^2+1\Rightarrow S': y=2a(\frac{x}{2}-1)^2+2$$

همچنین ضابطهٔ بازتاب نسبت به محور yها به‌صورت $T(x,y)=(-x,y)$ است. بنابراین:

$$T(x,y)=(-x,y)=(X,Y)\Rightarrow Y=2a(-\frac{X}{2}-1)^2+2$$

$$\Rightarrow S'': y=2a(\frac{x}{2}+1)^2+2$$

چون S'' خط $y=3x$ را در نقطه‌ای به طول ۲ قطع می‌کند، پس از نقطهٔ (۲,۶) می‌گذرد:

$$6=2a(2)^2+2\Rightarrow 8a=4\Rightarrow a=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow S'': y=(\frac{x}{2}+1)^2+2$$

نقطهٔ برخورد آن را با خط $y=3x+8$ به‌دست می‌آوریم:

$$(\frac{x}{2}+1)^2+2=3x+8\Rightarrow \frac{x^2}{4}+x+3=3x+8$$

$$\Rightarrow x^2+4x+12=12x+32\Rightarrow x^2-8x-20=0$$

$$\Rightarrow (x-10)(x+2)=0\Rightarrow x=-2, x=10$$

۲. d عمودمنصف خط واصل بین نقاط A(۲,۳) و B(-۴,-۵) است. بنابراین:

$N(-1,-1)$ وسط AB

$$m_{AB}=\frac{-5-3}{-4-2}=\frac{4}{3}\Rightarrow m'=-\frac{3}{4}$$

$$d: y+1=-\frac{3}{4}(x+1)\Rightarrow d: 3x+4y=-7$$

و M وسط دو نقطهٔ A(۲,۳) و C(۰,۵) قرار دارد. بنابراین: M(۱,۴).
حال بازتاب M را نسبت به d می‌یابیم. برای این کار معادلهٔ MH (خط عمود از M بر d) را می‌یابیم و از برخورد آن با d، مختصات H را به‌دست می‌آوریم. سپس با توجه به اینکه H وسط MM´ است، مختصات M´ قرینهٔ M نسبت به d را به‌دست می‌آوریم:

$$m_d=-\frac{3}{4}\Rightarrow m'=\frac{4}{3}\Rightarrow MH: y-4=\frac{4}{3}(x-1)$$

$$\Rightarrow MH: 4x-3y=-8$$

$$\begin{array}{r} 4\\ +3\end{array}\begin{cases}4x-3y=-8\\ 3x+4y=-7\end{cases}$$

$$25x=-53\Rightarrow x=-\frac{53}{25},$$

$$y=\frac{-4}{25}\Rightarrow H(-\frac{53}{25},-\frac{4}{25}), M(1,4)$$

$$\left.\begin{array}{l} x_H=\frac{x_M+x_{M'}}{2}\Rightarrow -\frac{53}{25}=\frac{1+x_{M'}}{2}\Rightarrow x_{M'}=-\frac{131}{25}\\ y_H=\frac{y_M+y_{M'}}{2}\Rightarrow -\frac{4}{25}=\frac{4+y_{M'}}{2}\Rightarrow y_{M'}=-\frac{108}{25}\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow M'\left|\begin{array}{l}-\frac{131}{25}\\ -\frac{108}{25}\end{array}\right.$$

۳. زاویه‌های مجهول روی شکل را به سادگی و با توجه به مجموع زوایای داخلی مثلث‌ها می‌توان به‌دست آورد. با توجه به این موضوع داریم:

$$A\hat{B'}B=180-(75+30)=75^\circ,$$

$$A\hat{C}B=180-(40+75)=65^\circ$$

$$\Rightarrow A\hat{C}C'=140-65=75^\circ,$$

$$AC'C=180-(75+30)=75^\circ$$

و به این ترتیب نتیجه می‌شود که هر دو مثلث ABB´ و ACC´ متساوی‌الساقین و زاویهٔ رأس آن‌ها ۳۰° است. پس اگر دوران حول A و به اندازهٔ ۳۰° را تبدیل T تعریف کنیم، داریم (T ایزومتری است):

$$T(B)=B', T(C)=C'\Rightarrow T(BC)=B'C'$$

$$\Rightarrow BC=B'C'$$

جبر و احتمال

۱. پیشامد گویا بودن $\log_2^n$ را A و پیشامد گویا بودن $\log_4^n$ را B می‌نامیم و می‌خواهیم P(A–B) را به‌دست آوریم. برای آنکه $\log_2^n$ گویا باشد، لازم و کافی است که n توانی از ۲ باشد؛ پس:

$$A=\{۲^k \mid ۲^k\le ۱۰۰۰۰\}=\{۲^k \mid ۲^k\le ۲^{۱۳}\}$$

$$\Rightarrow A=\{۲^۰,۲^۱,\dots,۲^{۱۳}\}$$

و به‌همین ترتیب:

$$B=\{۴^k \mid ۴^k\le ۱۰۰۰۰\}=\{۴^k \mid ۴^k\le ۴^۶\}$$

$$\Rightarrow B=\{۴^۰,۴^۱,\dots,۴^۶\}$$

روشن است که: $B\subseteq A$، بنابراین:

$$P(A-B)=P(A)-P(B)=\frac{۱۴}{۱۰۰۰۰}-\frac{۷}{۱۰۰۰۰}=۰/۰۰۰۷$$

۲.

$$P(A-B)=۰/۳,\ \ P(A\cup B)=۰/۷,\ \ P(B')=?$$

$$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=۰/۳$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=۰/۷$$

با کم کردن تساوی‌ها از هم نتیجه می‌شود:

$$P(B)=۰/۴\Rightarrow P(B')=۱-P(B)=۰/۶$$

۳. متمم این پیشامد آن است که به یکی از سه نفر هیچ کارتی نرسد. اگر این سه نفر را a، b و c بنامیم، یعنی به a کارتی نرسد، یا به b کارتی نرسد یا به c کارتی نرسد و اگر این سه پیشامد را A، B و C بنامیم، ابتدا باید $P(A\cup B\cup C)$ را به‌دست آوریم. $P(A)$ احتمال پیشامد آن است که به a هیچ کارتی نرسد. یعنی همهٔ کارت‌ها بین b و c تقسیم شود. برای این کار $۲^{۱۰}$ روش وجود دارد (هر کارت را به دو طریق می‌توان توزیع کرد و طبق اصل ضرب ۱۰ کارت را به $۲^{۱۰}$ طریق می‌توان بین b و c تقسیم کرد). اما تمام راه‌های توزیع ۱۰ کارت بین سه نفر هم $۳^{۱۰}$ است. (چرا؟) لذا: $P(A)=\frac{۲^{۱۰}}{۳^{۱۰}}$ و به‌همین صورت: $P(B)=P(C)=\frac{۲^{۱۰}}{۳^{۱۰}}$. $P(A\cap B)$ یعنی هیچ کارتی به a نرسد و هیچ کارتی هم به b نرسد، پس همهٔ کارت‌ها به c برسد که فقط در یک حالت ممکن است. بنابراین:

$$P(A\cap B)=P(A\cap C)=P(B\cap C)=\frac{۱}{۳^{۱۰}}$$

همچنین بدیهی است که: $P(A\cap B\cap C)=۰$. (چرا؟) پس می‌توان نوشت:

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)$$
$$-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)$$
$$=\frac{۳\times ۲^{۱۰}-۳}{۳^{۱۰}}$$

آنچه مطلوب مسئله است برابر است با:

$$P(A\cup B\cup C)'=۱-P(A\cup B\cup C)=\frac{۳^{۱۰}-۳\times ۲^{۱۰}+۳}{۳^{۱۰}}$$

حسابان

۱.

$$f'(\frac{\pi}{۶})=\lim_{x\to\frac{\pi}{۶}}\frac{f(x)-f(\frac{\pi}{۶})}{x-\frac{\pi}{۶}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۶}}\frac{\tan(x-\frac{\pi}{۳})+\tan\frac{\pi}{۶}}{x-\frac{\pi}{۶}}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{۶}}\frac{\dfrac{\sin(x-\frac{\pi}{۶})}{\cos(x-\frac{\pi}{۳})\cos\frac{\pi}{۶}}}{x-\frac{\pi}{۶}}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{۶}}\frac{\sin(x-\frac{\pi}{۶})}{(x-\frac{\pi}{۶})}\times\lim_{x\to\frac{\pi}{۶}}\frac{۱}{\cos(x-\frac{\pi}{۳})\cos\frac{\pi}{۶}}$$

$$=۱\times\frac{۱}{\cos\frac{\pi}{۶}.\cos(-\frac{\pi}{۶})}=\frac{۱}{\cos^۲\frac{\pi}{۶}}=\frac{۱}{\frac{۳}{۴}}=\frac{۴}{۳}$$

۲.

الف) $f'(x)=\dfrac{(۲\sin x^۲)(۲x\cos x^۲)}{۳\sqrt[۳]{\sin^۴ x^۲}}$

ب) $g(x)=\dfrac{۱+۳(x+\sqrt{x})^۲(۱+\frac{۱}{۲\sqrt{x}})}{۲\sqrt{(x+\sqrt{x})^۳+x}}$

۳. نقطه‌ای به طول ۴، روی خط ۲x+y=۵، دارای عرض ۳- است. پس نقطهٔ (۳-,۴) روی خط و منحنی قرار دارد. لذا مختصات آن در معادلهٔ منحنی صدق می‌کند:

$$-۳=\frac{a\sqrt{۴}+b}{۱۶+۱}\Rightarrow ۲a+b=-۵۱$$

همچنین مشتق تابع در این نقطه، یعنی شیب مماس بر منحنی مساوی شیب خط ۲x+y=۵، یعنی ۲- است:

$$f'(۴)=-۲,\ f'(x)=\frac{\frac{a}{۲\sqrt{x}}(x^۲+۱)-۲x(a\sqrt{x}+b)}{(x^۲+۱)^۲}$$

$$\Rightarrow f'(۴)=\frac{-۴۷a-۳۲b}{۱۱۵۶}=-۲$$

$$\begin{cases}۲a+b=-۵۱\\ -۴۷a-۳۲b=-۲۳۱۲\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-۲۳۲\\ b=۴۱۳\end{cases}$$

پرسش‌های بیکارجو!

۵

اگر x، y و z زاویه‌های حاده‌ای باشند که مینی‌مم مجموع سینوس‌های آن‌ها مساوی ۲ باشد، ماکزی‌مم مجموع کسینوس‌های آن‌ها کدام است؟

- الف) ۲
- ب) $\sqrt{۵}$
- ج) $\sqrt{۶}$
- د) $\sqrt{۷}$
- هـ) $۲\sqrt{۲}$